

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Ιανουάριος 2024

Διδάσκων: Μ. Σταματάκης

Θέμα 1 (1 μον.) Να λυθούν οι εξισώσεις

$$(\alpha) \sin(2x) = 2\sin(x) \quad \text{και} \quad (\beta) \cos(2x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$

Θέμα 2 (1 μον.) Έστω p, q λογικές προτάσεις. Να εξετάσετε αν η πρόταση

$$[(p \implies q) \wedge p] \implies q$$

είναι ταυτολογία.

Θέμα 3 (1.5 μον.) Έστω $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ και $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ οι οικογένειες συνόλων που ορίζονται από τις

$$A_n = \left(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right) \quad \text{και} \quad B_n = \left[\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right], \quad n \in \mathbb{N}.$$

Δείξτε ότι

$$(\alpha) \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = [0, 1] \quad \text{και} \quad (\beta) \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = (0, 1).$$

Θέμα 4 (1.5 μον.) (α) Έστω \sim η σχέση που ορίζεται στο $X := \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ως εξής:

$$(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2) \iff \text{υπάρχει } \lambda \neq 0 \text{ τέτοιο ώστε } (y_1, y_2) = \lambda \cdot (x_1, x_2)$$

είναι σχέση ισοδυναμίας και βρείτε το σύνολο πηλίκο X/\sim .

(β) Έστω $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση $f(x_1, x_2) = \frac{x_2}{x_1}$. Δείξτε ότι υπάρχει συνάρτηση $g: X/\sim \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $g([(x_1, x_2)]) = f(x_1, x_2)$ για κάθε $(x_1, x_2) \in X$, όπου με $[(x_1, x_2)]$ συμβολίζουμε την κλάση ισοδυναμίας του $(x_1, x_2) \in X$.

Θέμα 5 (1.5 μον.) Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ η συνάρτηση με τύπο $f(x) = \sqrt{|x|}$.

(α) Βρείτε τα σύνολα

$$f^{-1}(f([1, 2])) \quad \text{και} \quad f(f^{-1}([1, 2])).$$

(β) Έστω $A \subseteq \mathbb{R}$ σύνολο με την ιδιότητα $x \in A$ αν και μόνο αν $-x \in A$. Δείξτε ότι $A = f^{-1}(f(A))$.

Θέμα 6 (1.5 μον.) Έστω $A, B \subseteq \mathbb{R}$ μη-κενά και φραγμένα. Θέτουμε $A + B := \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$. Δείξτε ότι

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

Θέμα 7 (1.5 μον.) Δείξτε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το δυναμοσύνολο του συνόλου $\{1, 2, \dots, n\}$ έχει 2^n το πλήθος στοιχεία.

Θέμα 8 (1.5 μον.) Να διατυπώσετε το Θεώρημα Schröder-Bernstein και χρησιμοποιώντας το να δείξετε ότι τα σύνολα $(0, 1)$ και $[0, 1]$ είναι ισοπληθικά.

Καλή επιτυχία!